

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**  
Отборочный этап 2024/25 учебного года для 10 класса

---

**Задача 1**

**В-1** Сколько существует целых чисел  $N$ , при которых  $48000 \cdot (2.5^N + 2.5^{N+1})$  — целое число?

**Ответ:** 10

**Решение.** Разложим выражение на простые множители:

$$48000 \cdot (2.5^N + 2.5^{N+1}) = 2^4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^N \cdot \left(1 + \frac{5}{2}\right) = 2^{6-N} \cdot 5^{3+N} \cdot 3 \cdot 7.$$

Так как числа 2, 3, 5 и 7 взаимно простые, то данное выражение будет целым, если одновременно выполняются два условия:  $6 - N \geq 0$  и  $3 + N \geq 0$ .

Получается 10 значений.

---

**В-2** Сколько существует целых чисел  $N$ , при которых  $160000 \cdot (1.25^N + 1.25^{N+1})$  — целое число?

**Ответ:** 8

---

**В-3** Сколько существует целых чисел  $N$ , при которых  $32000 \cdot (2.5^N + 2.5^{N+1})$  — целое число?

**Ответ:** 11

---

**В-4** Сколько существует целых чисел  $N$ , при которых  $80000 \cdot (1.25^N + 1.25^{N+1})$  — целое число?

**Ответ:** 7

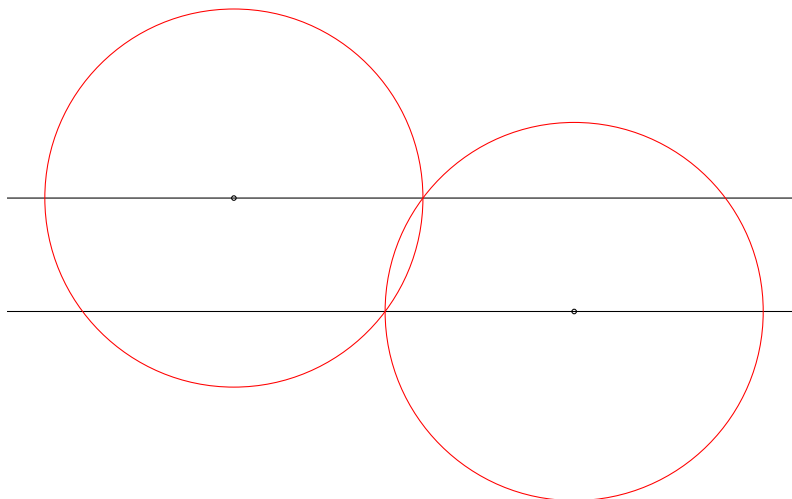
---

**Задача 2**

**В-1** Улица имеет форму полосы длины 200 м и ширины 5 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 13 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

**Ответ:** 9

**Решение.**



На своей стороне фонарь с радиусом 13 м освещает по 13 м обочины в обе стороны. Значит, на противоположной стороне он может осветить  $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$  метров обочины в обе стороны. Так или иначе, обе обочины нужно осветить полностью — один фонарь может осветить 24 + 26 метров обочин, обе обочины дают в общей сложности 400 м, так что понадобится минимум  $\frac{400}{50} = 8$  фонарей. Если у нас есть всего 8 фонарей, то общую длину обочин они освещают «впритык» — если вдруг освещение на обочинах наложится друг на друга, то общей длины уже не хватит на всю улицу. Это принуждает нас к оптимальной расстановке фонарей в «шахматном порядке» — то есть если на этой стороне есть фонарь, то через 25 метров на противоположной стороне будет стоять следующий фонарь. Отдельно взятую обочину поочерёдно освещают то фонари с этой стороны, то с противоположной — без пробелов и наложений. Будь следующий фонарь на другом расстоянии, или у другой обочины — получилось бы наложение света, или же пробел, которой бы пришлось заполнять дополнительным фонарём. Поэтому расстановка шахматная.

Само дорожное полотно с такой расстановкой тоже будет освещено полностью — с небольшими наложениями.

С такой расстановкой получится осветить по 200 метров обочины с каждой стороны всего восьмью фонарями — но эти 200 метров освещённых обочин будут сдвинуты на метр относительно друг друга. Около торца прямоугольной улицы получится небольшой неосвещённый «треугольник». Для того, чтобы осветить всю улицу, понадобится 9-й фонарь.

---

**В-2** Улица имеет форму полосы длины 320 м и ширины 8 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 17 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

**Ответ:** 11

---

**В-3** Улица имеет форму полосы длины 294 м и ширины 7 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 25 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

**Ответ:** 7

---

**В-4** Улица имеет форму полосы длины 972 м и ширины 9 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 41 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

**Ответ:** 13

---

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 10 класса

---

**Задача 3**

**В-1** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$25y^2 + \frac{1}{100} \geq x - axy + y - 25x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 50

**Решение.** Рассматриваем случаи  $y = x$  и  $y = -x$ . В случае, когда  $x = y$ , имеем:

$$x^2(50 + a) - 2x + \frac{1}{100} \geq 0.$$

В случае, когда  $x = -y$ , имеем:

$$x^2(50 - a) + \frac{1}{100} \geq 0.$$

Рассмотрим сначала случай  $x = y$ . Слева график — парабола. Чтобы неравенство выполнялось для всех  $x$ , необходимо, чтобы ветви были направлены вверх, следовательно,  $50 + a > 0$  и дискриминант был неположительный (покажем про упрощенный дискриминант)

$$1 - \frac{50 + a}{100} \leq 0$$

Из первого неравенства следует, что  $a > -50$ . А из второго  $a \geq 50$ . Следовательно, имеем  $a \geq 50$ .

Аналогично, для случая  $x = -y$  имеем  $a \leq 50$ . Значит,  $a = 50$ .

---

**В-2** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$24y^2 + \frac{1}{96} \geq x - axy + y - 24x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 48

---

**В-3** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$2025y^2 + \frac{1}{8100} \geq x - axy + y - 2025x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 4050

---

**В-4** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$2024y^2 + \frac{1}{8096} \geq x - axy + y - 2024x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 4048

---

**В-5** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$506y^2 + \frac{1}{2024} \geq x - axy + y - 506x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 1012

---

**В-6** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$1012y^2 + \frac{1}{4048} \geq x - axy + y - 1012x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 2024

---

**В-7** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$12y^2 + \frac{1}{48} \geq x - axy + y - 12x^2$$

выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 24

---

**В-8** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$20y^2 + \frac{1}{80} \geq x - axy + y - 20x^2$$

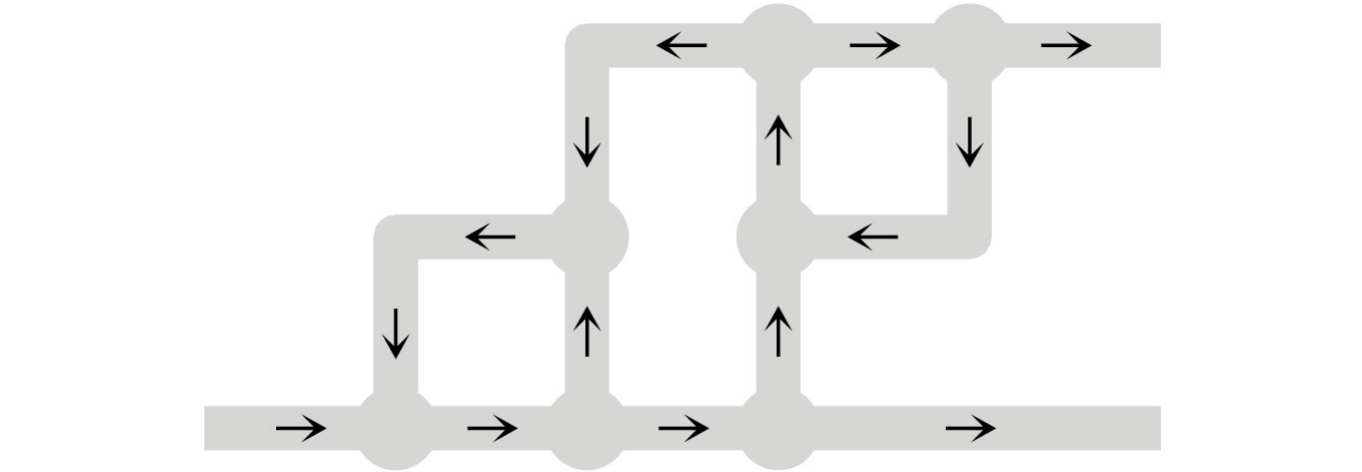
выполняется для любых пар чисел  $(x, y)$ , таких что  $|x| = |y|$ . В ответ записать сумму возможных значений параметра  $a$ , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений  $a$ , если значений  $a$  бесконечно много. Если значений  $a$  нет никаких — пишите 0.

**Ответ:** 40

---

### Задача 4

B-1

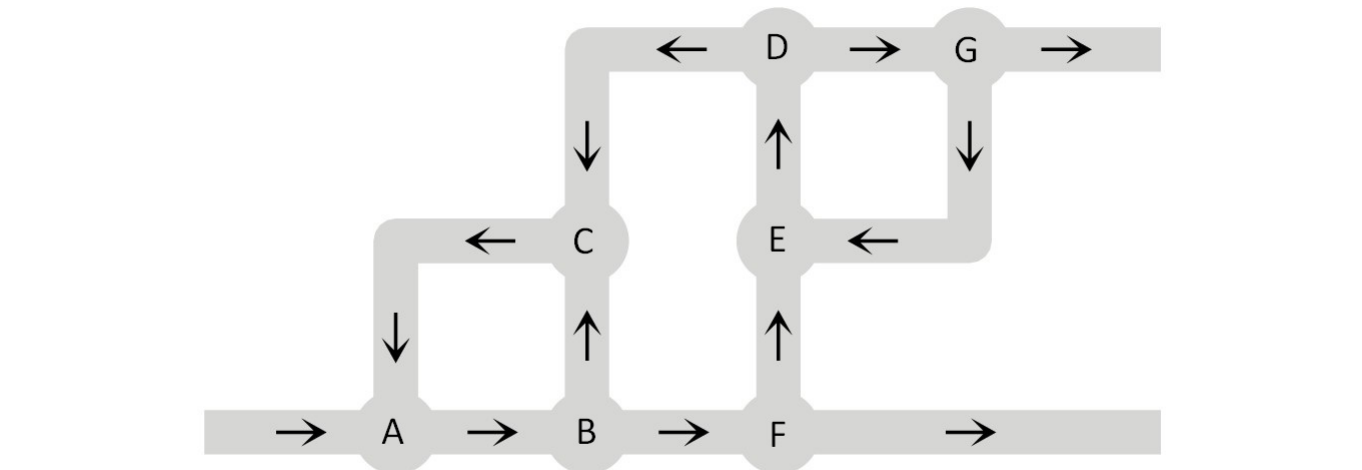


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.25

Решение.



Пойдём по трубам последовательно. В клапане  $A$  к потоку извне (пусть он равен 1) прибавляется сколько-то воды от обратной петли. Сколько по ней поступает — нам пока неизвестно, поэтому обозначим добавленное количество неизвестной  $x$ . Тогда: в точке  $B$  поток разделится на  $\frac{1+x}{2}$  и  $\frac{1+x}{2}$ . В точке  $F$  приходящее разделится на  $\frac{1+x}{4}$  и  $\frac{1+x}{4}$ . В точке  $E$  к  $\frac{1+x}{4}$  прибавится неизвестное количество  $y$ . В точке  $D$  поток  $\frac{1+x}{4} + y$  разбивается пополам, течёт к  $G$  и  $C$ , и если

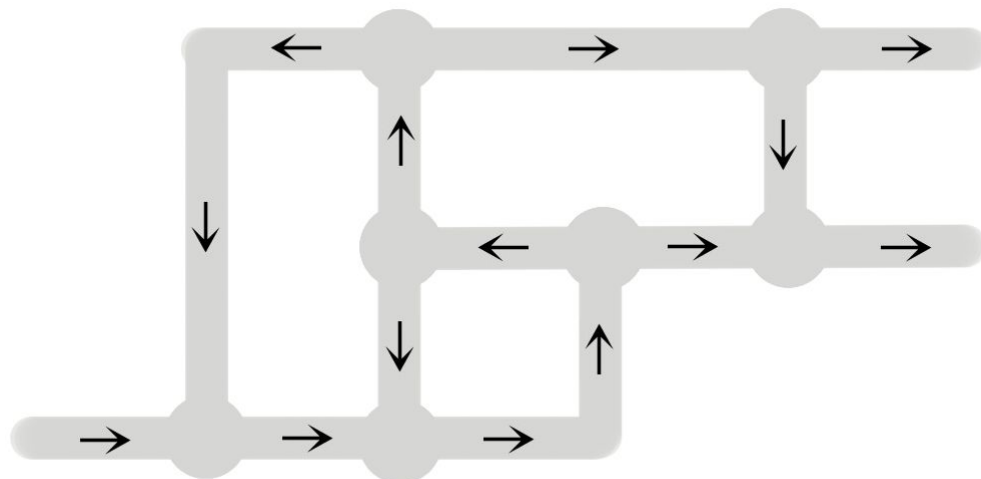
мы напишем условия равновесия в клапанах  $G$  и  $C$  — мы получим систему, определяющую значения  $x$  и  $y$ . Система такая:

$$\begin{cases} \frac{1+x}{8} + \frac{y}{2} = 2y, \\ \frac{1+x}{8} + \frac{y}{2} + \frac{1+x}{2} = x. \end{cases}$$

Решения системы —  $y = \frac{1}{4}, x = 2$ .

Через верхнюю трубу выходит  $y$ , а  $y$  равно 0.25, это и будет ответ.

## В-2

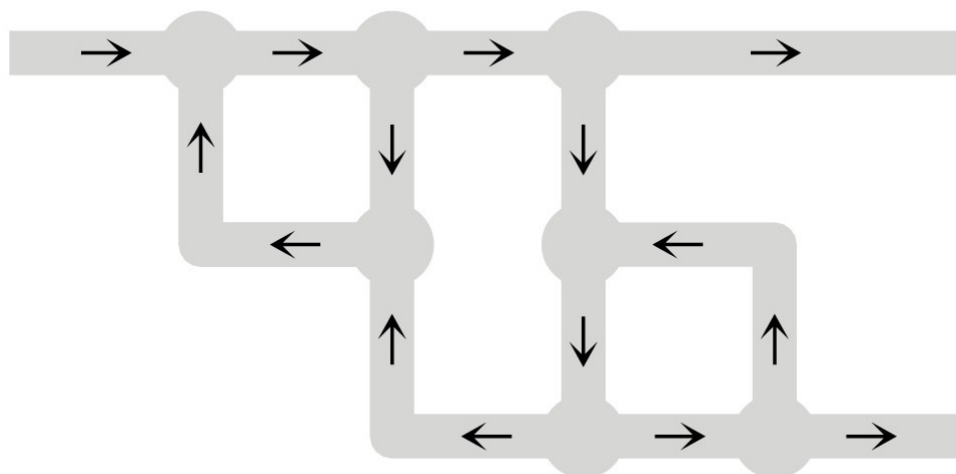


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

**Ответ:** 0.1

## В-3



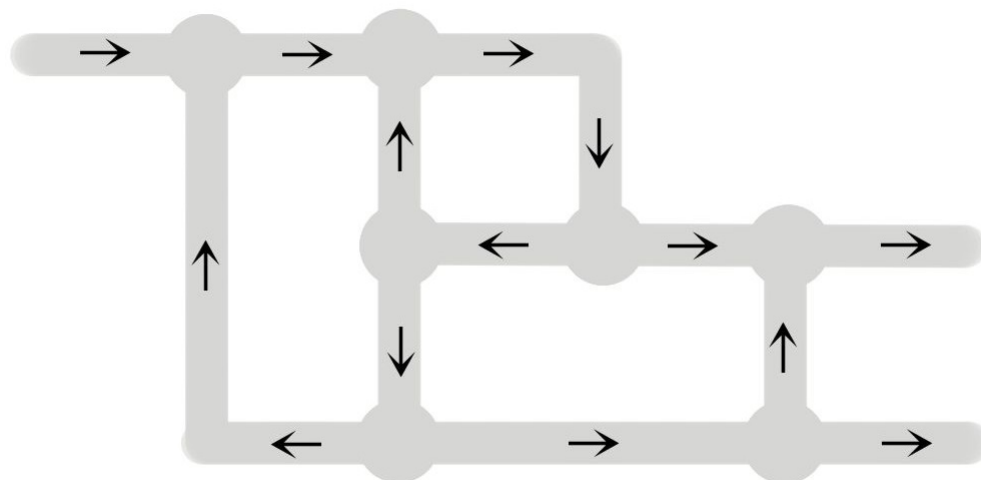
Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

**Ответ:** 0.75

---

**В-4**



Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

**Ответ:** 0.9

---

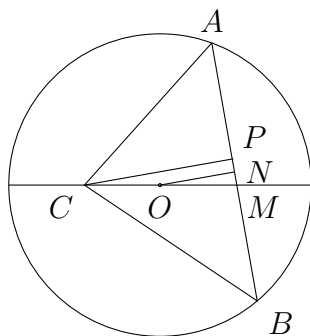


### Задача 5

**В-1** Дана окружность с центром  $O$  и радиусом  $4\sqrt{3}$ . Проведена хорда  $AB$ , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника  $ABC$ . Диаметр окружности, проходящий через вершину  $C$ , делится на четыре равных отрезка вершиной  $C$  треугольника, центром  $O$  окружности и точкой пересечения диаметра с хордой  $AB$ . Найдите расстояние от центра окружности до хорды  $AB$ .

**Ответ:** 3

**Решение.**



Пусть  $M$  — точка пересечения диаметра с гипотенузой  $AB$ . Отметим, что расположение точек  $O, C, M$  на диаметре определяется однозначно — так как  $O$  обязана быть посередине.

Опустим из точки  $O$  перпендикуляр  $ON$  к хорде  $AB$ . Тогда  $N$  — середина отрезка  $AB$  (так как  $ON$  — высота равнобедренного треугольника  $AOB$ ). Проведем  $CP \parallel ON$  (где  $P$  лежит на  $AB$ ) и соединим  $N$  и  $C$  отрезком прямой. Рассмотрим треугольник  $MCP$ . Отрезок  $ON$  — средняя линия треугольника, тогда  $CP = 2 \cdot ON$ . Отрезок  $CN$  — медиана в прямоугольном треугольнике  $ABC$ , следовательно  $CN = \frac{1}{2}AB = NB$ .

Пусть  $ON = x$ ,  $MN = NP = y$ ,  $CN = NB = z$ .

Тогда, так как  $OM = \frac{1}{2}R$ , из треугольников  $ONB$ ,  $CNP$  и  $OMN$  на основании теоремы Пифагора получаем:

$$\begin{cases} x^2 = R^2 - z^2, \\ (2x)^2 = z^2 - y^2, \\ x^2 = \left(\frac{1}{2}R\right)^2 - y^2. \end{cases}$$

Складывая почленно первые два уравнения и затем вычитая из результата третье, находим

$$\begin{aligned} (2x)^2 &= R^2 - \left(\frac{1}{2}R\right)^2, \\ 4x^2 &= \frac{3}{4}R^2, \\ x &= \frac{\sqrt{3}}{4}R. \end{aligned}$$

**В-2** Дана окружность с центром  $O$  и радиусом  $8\sqrt{3}$ . Проведена хорда  $AB$ , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника  $ABC$ . Диаметр окружности, проходящий через вершину  $C$ , делится на четыре равных отрезка вершиной  $C$  треугольника, центром  $O$  окружности и точкой пересечения диаметра с хордой  $AB$ . Найдите расстояние от центра окружности до хорды  $AB$ .

**Ответ: 6**

---

**В-3** Дана окружность с центром  $O$  и радиусом  $16\sqrt{3}$ . Проведена хорда  $AB$ , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника  $ABC$ . Диаметр окружности, проходящий через вершину  $C$ , делится на четыре равных отрезка вершиной  $C$  треугольника, центром  $O$  окружности и точкой пересечения диаметра с хордой  $AB$ . Найдите расстояние от центра окружности до хорды  $AB$ .

**Ответ: 12**

---

**В-4** Дана окружность с центром  $O$  и радиусом  $32\sqrt{3}$ . Проведена хорда  $AB$ , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника  $ABC$ . Диаметр окружности, проходящий через вершину  $C$ , делится на четыре равных отрезка вершиной  $C$  треугольника, центром  $O$  окружности и точкой пересечения диаметра с хордой  $AB$ . Найдите расстояние от центра окружности до хорды  $AB$ .

**Ответ: 24**

---

**Задача 6**

**В-1** Найдите  $\operatorname{tg}|x|$ , если известно, что

$$\left(5 \sin x + 3 \cos x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{11} - 3\sqrt{\sin |x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений  $\operatorname{tg}|x|$ , округлённую до тысячных.

**Ответ:** 0.696

**Решение.** Отметим, что вторая скобка не обращается в ноль, так как  $\sqrt{\sin |x|} \leq 1 < \frac{\sqrt{11}}{3}$ . Таким образом, уравнение равносильно системе уравнения и неравенства

$$\begin{cases} \sin |x| \geq 0, \\ 5 \sin x + 3 \cos x + \sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

Решаем уравнение из этой системы — получаем ещё одну систему из уравнения и неравенства:

$$\begin{cases} 5 \sin x + 3 \cos x < 0 \\ 25 \sin^2 x + 30 \sin x \cos x + 9 \cos^2 x = 2 \end{cases}$$

Решаем уравнение:

$$25 \sin^2 x + 30 \sin x \cos x + 9 \cos^2 x = 2$$

$$25 \sin^2 x + 30 \operatorname{tg} x \cos^2 x + 9 \cos^2 x = 2$$

Используем замены  $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ ,  $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ .

$$25 \left( \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) + 30 \operatorname{tg} x \left( \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) + 9 \left( \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) = 2$$

Умножаем на  $1 + \operatorname{tg}^2 x$ , переносим всё на одну сторону — и получаем квадратное уравнение

$$23 \operatorname{tg}^2 x + 30 \operatorname{tg} x + 7 = 0.$$

Решения уравнения — это  $\operatorname{tg} x = -1$  и  $\operatorname{tg} x = -\frac{7}{23}$ . В свою очередь,  $\operatorname{tg}|x|$  сможет потенциально принимать такие значения:  $1, -1, \frac{7}{23}, -\frac{7}{23}$  (потому что, обрамляя  $x$  модулем, мы либо оставляем  $x$  как есть, либо умножаем на минус один — а тангенс функция нечётная.) Проверим, подходят ли найденные  $x$  под накопившиеся условия. Перед проверкой условий отметим, что

$$\operatorname{tg}|x| = \frac{\sin |x|}{\cos |x|} = \frac{\sin |x|}{\cos x}.$$

Для выполнения условий нужно, чтобы знак  $\operatorname{tg}|x|$  совпадал со знаком  $\cos x$ .

Когда  $\cos x > 0$ , из неравенства во второй системе следует, что  $\operatorname{tg} x \leq -\frac{3}{5}$ . Значит,  $\operatorname{tg} x = -1$ , но  $\operatorname{tg}|x| > 0$ , поэтому  $\operatorname{tg}|x| = 1$ .

Когда  $\cos x < 0$ , из неравенства во второй системе следует, что  $\operatorname{tg} x \geq -\frac{3}{5}$ . Значит,  $\operatorname{tg} x = -\frac{7}{23}$ , но  $\operatorname{tg}|x| < 0$ , поэтому  $\operatorname{tg}|x| = -\frac{7}{23}$ .

В ответ идёт  $1 - \frac{7}{23}$ .

---

**В-2** Найдите  $\operatorname{ctg}|x|$ , если известно, что

$$\left(5 \cos x + 7 \sin x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{2} - \sqrt{\sin |x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений  $\operatorname{ctg}|x|$ , округлённую до тысячных.

**Ответ:**  $-1.043$

---

**В-3** Найдите  $\operatorname{tg} 2|x|$ , если известно, что

$$\left(5 \sin 2x + 3 \cos 2x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{11} - 3\sqrt{\sin 2|x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений  $\operatorname{tg} 2|x|$ , округлённую до тысячных.

**Ответ:**  $0.696$

---

**В-4** Найдите  $\operatorname{ctg} 3|x|$ , если известно, что

$$\left(5 \cos 3x + 7 \sin 3x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{2} - \sqrt{\sin 3|x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений  $\operatorname{ctg} 3|x|$ , округлённую до тысячных.

**Ответ:**  $-1.043$

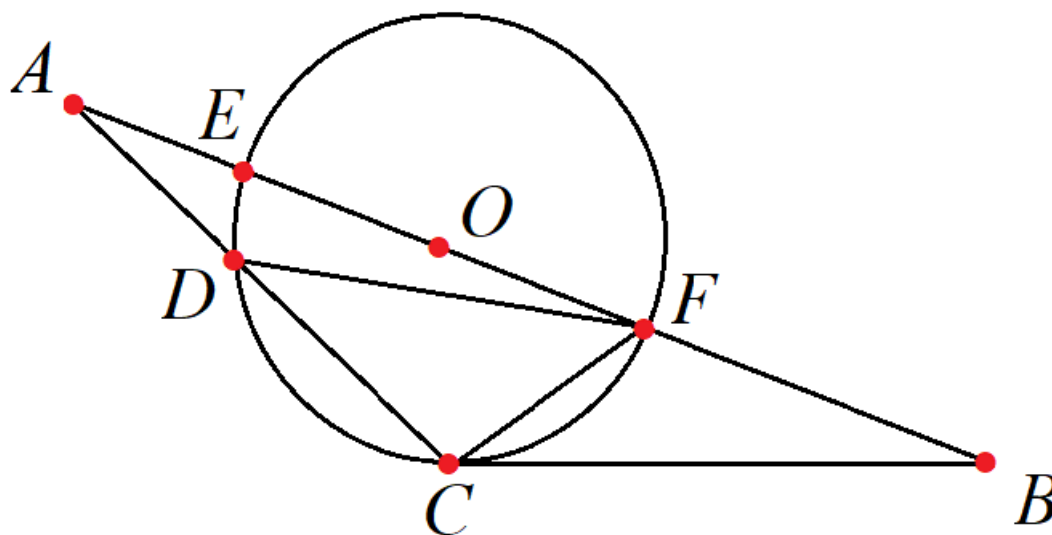
---

### Задача 7

**В-1** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 5$ ,  $FB = 3$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При необходимости округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 14.29

**Решение.**



Так как окружность касается  $BC$ , то  $C$  — точка касания. По теореме о касательной и секущей  $BC^2 = BE \cdot BF \Rightarrow 5^2 = (3 + 2R) \cdot 3 \Rightarrow R = \frac{8}{3}$ .

Продолжим  $CO$  до диаметра. Тогда из точки пересечения этого диаметра с окружностью  $C_1$  (на рисунке не обозначена) на хорду  $DC$  будет опираться угол, равный  $\angle DFC$ . При этом треугольник  $CDC_1$  опирается на диаметр, поэтому он прямоугольный, а угол  $\angle OCB$  прямой, и  $\angle DCB = 90^\circ + \angle OCD$ . Вместе это значит, что  $\angle DCB + \angle DFC = 180^\circ$ . Так как  $\angle DCB + \angle DFC = 180^\circ$ , а  $\angle DCB - \angle DFC = 90^\circ$  (по условию), то  $\angle DCB = 135^\circ$  и  $\angle DFC = 45^\circ$ . Отсюда соответствующий центральный угол  $\angle DOC = 90^\circ$ , и, так как  $OC$  перпендикулярно  $CB$ , отрезок  $DO$  параллелен  $CB$ .

Тогда

$$\frac{AO}{AB} = \frac{DO}{CB} \Rightarrow \frac{AF - \frac{8}{3}}{AF + 3} = \frac{\frac{8}{3}}{5} \Rightarrow AF = \frac{64}{7} \Rightarrow AB = \frac{85}{7}.$$

Так как

$$\sin \angle ABC = \frac{R}{R + 3} = \frac{8}{17},$$

то

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{7} \cdot 5 \cdot \frac{8}{17} = \frac{100}{7}.$$

**В-2** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 5$ ,  $FB = 4$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При необходимости округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 3.63

**В-3** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке

*F.* Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 6$ ,  $FB = 4$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При надобности округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 12.86

---

**В-4** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 3$ ,  $FB = 2$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При надобности округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 3.21

---

**В-5** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 4$ ,  $FB = 3$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При надобности округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 3.29

---

**В-6** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 7$ ,  $FB = 5$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При надобности округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 12.78

---

**В-7** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 8$ ,  $FB = 5$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При надобности округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 30.44

---

**В-8** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точках  $C$  и  $D$ , касается стороны  $BC$  и пересекает отрезок  $AO$  в точке  $E$ , а отрезок  $BO$  в точке  $F$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $BC = 8$ ,  $FB = 6$  и  $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$ . При надобности округлите ответ до сотых.

**Ответ:** 13.18

---

### Задача 8

**В-1** 11 друзей катаются на катке в форме правильного 22-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

**Ответ:** 1862080

**Решение.** Ясно, что в одной точке не могут пересечься траектории более двух друзей – иначе число пересечений можно увеличить, немного подвинув траектории. При этом точек пересечения разных траекторий конечное число, потому что никто не ехал по диагонали (т.к. нет отпечатков в углах). Для вычисления можно считать, что траектория движения каждого из друзей состоит из параллельных линий (они будут перпендикулярны соответствующей данному другу паре бортиков). Число линий равно 2024. И если каждый  $j$ -й друг прочертил  $n_j$  линий, то  $n_1 + n_2 + \dots + n_{11} = 2024$ . Теперь нам нужно максимизировать число пересечений, т.е. сумму всевозможных величин  $n_k \cdot n_l$  при различных  $k, l$ . Ясно (но это требует доказательства!), что максимум достигается при  $n_1 = n_2 = \dots = n_{11}$ . Поэтому искомый максимум равен  $\frac{10 \cdot 11}{2} \left(\frac{2024}{11}\right)^2 = 1862080$ .

Обоснуем, что максимум  $\sum_{k < l} n_k \cdot n_l$  достигается при равенстве величин  $n_i$ . Переложим единицу с  $n_1$  на  $n_2$  и сравним суммы попарных произведений до и после:

$$n_1, n_2, n_3, \dots, n_m \rightarrow n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m.$$

$$n_1 - 1, n_2 + 1, n_3, \dots, n_m \rightarrow (n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m) - n_2 - n_3 - \dots - n_m + n_1 + n_3 + \dots + n_m - 1$$

То есть изменение суммы равно  $n_1 - n_2 - 1$ . Если  $n_1 = n_2 + k$ , (то есть  $n_1$  было больше), то мы добиваемся прироста суммы произведений размера  $k - 1$ . Если, наоборот,  $n_2$  было больше  $n_1$ , то получается гарантированная убыль. Значит, если сумма  $n_i$  фиксированная, переложить баллы с большего  $n_i$  на меньшее  $n_j$  выгодно (если  $|n_i - n_j| = 1$ , то такие перекалывания ничего не добавляют). Получается, что самая выгодная конфигурация — когда нету больших и меньших значений, когда множители равны друг другу и общая сумма поделена поровну (а если поровну баллы не делятся, то  $n_i$  равны друг другу с точностью до единицы, но в нашем случае 2024 делится на 11 без остатка).

---

**В-2** 8 друзей катаются на катке в форме правильного 16-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

**Ответ:** 1792252

---

**В-3** 23 друга катаются на катке в форме правильного 46-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика

и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

**Ответ:** 1959232

---

**В-4** 88 друзей катаются на катке в форме правильного 176-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

**Ответ:** 2025012

---