

Олимпиада «Ломоносов» по Робототехнике. Очный этап.  
8-10 классы. 2024–2025 уч. г

№1 (5 баллов) Известно, что устройство получило следующий набор бит: 0000 1010 1101 1110. Первые 8 бит – это число, вторые 8 бит – это последовательность действий, которые надо совершить над числом.

Код	Действие
01	Прибавить 1
10	Вычесть 1
11	Умножить на 2
00	Поделить на 2

Устройство выполнило указанные действия с числом и вернуло результат – восьмибитный двоичный код. Если при выполнении операций получается число, содержащее больше одного байта, то передаётся только младшие 8 бит результата. Определите, какую последовательность из бит вернуло устройство. В ответе запишите восьмибитное двоичное число, например, 0011 1111.

Ответ: 0010 1001

Решение

Надо проделать действия 11 01 11 10, то есть умножить на 2, прибавить 1, умножить на 2, вычесть 1.

Произведём эти действия над числом 1010.

$$1010 * 10 = 10100$$

$$10100 + 1 = 10101$$

$$10101 * 10 = 101010$$

$$101010 - 1 = 101001$$

Дополним получившее число до восьми бит:

0010 1001

№ п/п	Критерий	Баллы
1.1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (0010 1001)	5
1.2	Приведён только верный ответ (0010 1001)	3
1.3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит в себе <b>одну</b> ошибку	2
1.4	В остальных случаях	0

Олимпиада «Ломоносов» по Робототехнике. Очный этап.  
8-10 классы. 2024–2025 уч. г

№2 (5 баллов) Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами радиуса 12 см. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. Ширина колеи (расстояние между центрами колёс) равна 1 м. Робот совершил танковый поворот на  $60^\circ$  (колесо А вращается назад, колесо В вращается вперёд). Определите угол, на который повернётся ось мотора В за время поворота робота. Ответ дайте в градусах.

Ответ:  $250^\circ$ ;

Решение

1 м = 100 см

Радиус окружности, по которой движется центр колеса В:

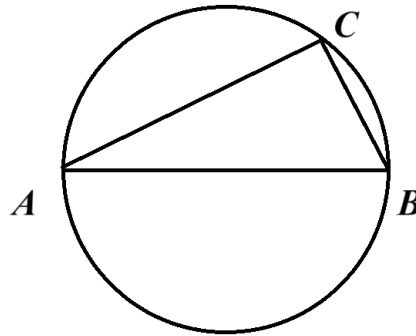
$$100:2=50 \text{ (см)}$$

Определим угол, на который повернётся ось мотора В за время поворота робота:

$$\frac{60^\circ * 50 \text{ см}}{12 \text{ см}} = 250^\circ$$

№ п/п	Критерий	Баллы
1.1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения ( $250^\circ$ )	5
1.2	Приведён только верный ответ ( $250^\circ$ )	3
1.3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит в себе <b>одну</b> ошибку	2
1.4	В остальных случаях	0

№3 Робот движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на неё изображение (см. Рисунок) при помощи кисти, закреплённой посередине между колёс.



Рисунок

Изображение состоит из окружности и трёх отрезков. Известно, что АВ - диаметр окружности,  $\angle A$  в 2 раза меньше, чем  $\angle B$ .

При повороте в вершине робот совершает танковый поворот. Робот не может ехать назад. Робот должен проехать по каждой линии траектории ровно по одному разу.

А) (5 баллов) Определите градусную меру  $\angle B$ . Ответ дайте в градусах;

Б) (5 баллов) Определите величину минимального суммарного угла поворота, на который должен повернуться робот при проезде по всей траектории. Ответ дайте в градусах.

#### Справочная информация

*Если робот движется по дуге окружности, то под углом поворота понимается градусная мера центрального угла дуги.*

*Угол между секущей и дугой окружности равен углу между секущей и касательной, проведённой в точке пересечения секущей окружности.*

*Под суммарным углом поворота понимается сумма величин углов поворотов, при этом направление поворотов робота не учитывается.*

Ответы:

А)  $60^\circ$ ;

Б)  $630^\circ$ .

#### Решение

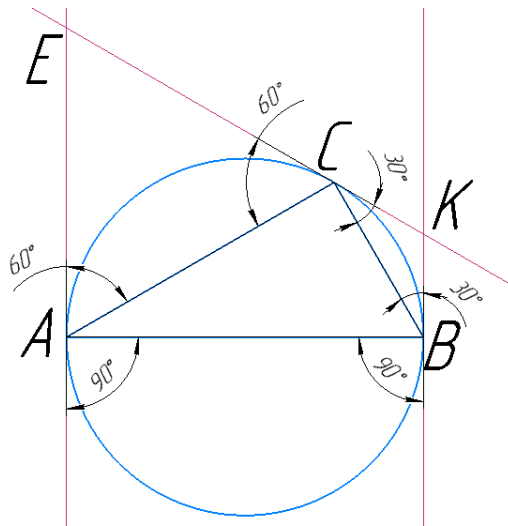
Определим градусные меры углов треугольника ABC.

$\angle C = 90^\circ$  так как он вписанный и опирается на диаметр.

$\angle B = 2\angle A$  и  $\angle B + \angle A = 90^\circ$ .

Значит,  $\angle A = 30^\circ$ , а  $\angle B = 60^\circ$ .

Построим касательные к окружности в точках А, В и С. Получим следующую конфигурацию:



Углы между касательными к окружности и сторонами треугольника можно определить, воспользовавшись тем, что угол между касательной и радиусом, проведённым в точку касания равен  $90^\circ$ , и тем, что отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой, а также свойством равнобедренного треугольника.

Градусная мера окружности равна  $360^\circ$ .

Если представить фигуру как граф, отрезки и дуги как рёбра, а вершины треугольника как вершины графа, то мы получим, что все три вершины графа имеют чётные степени. Значит, данный граф можно обойти полностью, не проходя ни по одному из рёбер дважды, стартовав из любой из вершин.

Отметим, что для проезда по окружности, выгоднее всего, стартовав в вершине треугольника, начертить её полностью проехав по всем вершинам по одному разу и вернувшись в исходную, а потом уже поворачивать на сторону треугольника. Или же наоборот, нарисовать треугольник полностью, а потом уже перейти к изображению окружности.

Для определённости будем считать, что сперва мы изображаем всю окружность, а потом только треугольник. Второй случай будет решаться аналогично.

Расчёты показывают, что имеет значение направление, в котором переходить с окружности на сторону треугольника.

Вершина, в которой произойдёт переход от изображения окружности к изображению треугольника, будет совпадать с точкой старта изображения. Направление, в котором будет происходить обход окружности выгодно сохранить и при обходе треугольника.

Посчитаем угол поворота робота при старте в каждой из вершин, выбрав в качестве направления обхода то, при котором угол перехода с окружности на треугольник будет минимальным из двух возможных.

При старте в вершине А выгоднее всего обходить в порядке А-С-В-А-С-В-А:

$$360^\circ + 60^\circ + (180^\circ - 90^\circ) + (180^\circ - 60^\circ) = 360^\circ + 60^\circ + 90^\circ + 120^\circ = 630^\circ$$

При старте в вершине В выгоднее всего обходить в порядке В-С-А-В-С-А-В:

$$360^\circ + 30^\circ + (180^\circ - 90^\circ) + (180^\circ - 30^\circ) = 360^\circ + 30^\circ + 90^\circ + 150^\circ = 630^\circ$$

При старте в вершине С выгоднее всего обходить в порядке С-В-А-С-В-А-С:

$$360^\circ + 30^\circ + (180^\circ - 60^\circ) + (180^\circ - 30^\circ) = 360^\circ + 30^\circ + 120^\circ + 150^\circ = 660^\circ$$

Олимпиада «Ломоносов» по Робототехнике. Очный этап.  
8-10 классы. 2024–2025 уч. г

Как мы видим, нам одинаково выгодно стартовать в вершинах А и В. В этом случае, при соблюдении всех выше изложенных требований угол поворота робота будет минимальным и равным  $630^\circ$ .

№ п/п	Критерий	Баллы
<b>Пункт А</b>		
1.1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения ( $60^\circ$ )	5
1.2	Приведён только верный ответ ( $60^\circ$ )	3
1.3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит в себе <b>одну</b> ошибку	2
1.4	В остальных случаях	0
<b>Пункт Б</b>		
2.1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения ( $630^\circ$ )	5
2.2	Приведён только верный ответ ( $630^\circ$ )	3
2.3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит в себе <b>одну</b> ошибку	2
2.4	В остальных случаях	0

№4 Из шестерёнок собрали двухступенчатую передачу. На ведущей оси передачи стоит шестерёнка с 8 зубьями, на ведомой оси первой ступени с 16 зубьями, на ведущей оси второй ступени - шестерёнка с 16 зубьями, на ведомой оси передачи - шестерёнка 24 зубьями.

На ведущей оси передачи закреплён цилиндрический барабан, который может вращаться вместе с осью. Диаметр барабана равен 15 см. К барабану привязана тонкая, прочная, нерастяжимая нить. Нить плотно намотана на барабан в один слой. На другом конце нити подвешен груз. Масса груза подобрана так, что груз равномерно опускается каждую секунду на 5 см.

На ведомой оси передачи закреплён цилиндрический барабан, который может вращаться вместе с осью. Радиус барабана равен 15 см. К барабану привязана тонкая, прочная, нерастяжимая нить, которая будет наматываться на барабан, если ось передачи будет вращаться. Нить наматывается всегда в один слой.

К другому концу нити прикреплена тележка на четырёх колёсах. Диаметр каждого из колёс тележки равен 6 см. Тележку поставили рядом с бумажной полосой, вдоль которой тележка может двигаться. На тележке установлена капельная машина, из крана которой каждые 5 секунд падает по 1 капле. Считайте, что капли достигают поверхности полоски моментально.

При расчётах примите  $\pi \approx 3,14$ . Округление стоит производить только при получении финального ответа.

А) (5 баллов) Определите сколько оборотов в минуту совершает барабан на ведомой оси передачи. Приведите результат с точностью до десятых;

Б) (5 баллов) Определите, какое расстояние будет между 9 и 15 каплей. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целых.

Ответ:

А) 2,1 об./мин.;

Б) 100 см.

Решение

Определим сколько оборотов в минуту делает ведущая ось:

$$\frac{5}{15\pi} * 60 = \frac{20}{\pi} \text{ (об./мин.)}$$

Число оборотов ведомой оси равно:

$$\frac{20}{\pi} : \left( \frac{16}{8} * \frac{24}{16} \right) = \frac{20}{3\pi} \approx \frac{20}{3 * 3,14} = 2,123... \approx 2,1 \text{ (об./мин.)}$$

Скорость движения тележки:

$$\frac{20}{3\pi} * 2 * \pi * 15 = 200 \text{ (см/мин.)}$$

$$200 \frac{\text{см}}{\text{мин.}} = \frac{200 \text{ см}}{60 \text{ с}}$$

Промежуток времени, между тем, как упадёт 9 и 15 капля равен

$$(15-9)*5=30 \text{ с}$$

Расстояние между 9 и 15 каплей будет равно:

$$\frac{200}{60} * 30 = 100 \text{ (см)}$$

Олимпиада «Ломоносов» по Робототехнике. Очный этап.  
8-10 классы. 2024–2025 уч. г

№ п/п	Критерий	Баллы
<b>Пункт А</b>		
1.1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (2,1 об./мин.)	5
1.2	Приведён только верный ответ (2,1 об./мин.)	3
1.3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит в себе <b>одну</b> ошибку	2
1.4	В остальных случаях	0
<b>Пункт Б</b>		
2.1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (100 см)	5
2.2	Приведён только верный ответ (100 см)	3
2.3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит в себе <b>одну</b> ошибку	2
2.4	В остальных случаях	0

№5 Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, радиус каждого из колёс робота равен 8 см. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Ширина колеи (расстояние между центрами колёс) робота равна 24 см.

Оба мотора и включились, и отключились одновременно. Ось каждого из моторов вращалась со своей постоянной частотой. Ось мотора А повернулась на  $1200^\circ$ . Ось мотора В повернулась на  $1500^\circ$ .

Моторы на роботе установлены так, что если обе оси повернутся на  $10^\circ$ , то робот проедет прямо вперёд. Между колёсами, на расстоянии 8 см от центра колеса А расположен маркер.

А) (5 баллов) Определите угол, на который повернётся робот. Ответ дайте в градусах.

Б) (5 баллов) Определите длину линии, которую начертит робот маркером. При расчётах примите  $\pi \approx 3,14$ . Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целых. Округление стоит производить только при получении финального ответа.

Ответ:

А)  $100^\circ$ ;

Б) 181 см.

Решение

Так как моторы робота повернулись в одном направлении, то есть углы поворота осей моторов одного знака и не равны по модулю, то точка, вокруг которой повернётся робот, будет находиться вне отрезка АВ. Так как ось мотора В повернулась на больший угол, чем ось мотора А, то центр поворота О будет ближе к точке А.

$R_A$  и  $R_B$  - это радиусы концентрических окружностей, по которым двигаются центра колёс А и В соответственно.

Запишем соотношение, связывающее радиус окружности, по которой движется точка, угол поворота робота, радиус колеса, в центре которого и находится точка и угол поворота оси мотора:

$$R_A * \alpha = r_A * \varphi_A$$

Где  $R_A$  - радиус окружности, по которой движется точка А;

$\alpha$  - угол поворота робота;

$r_a$  - радиус колеса А;

$\varphi_A$  - угол поворота оси робота.

Мы можем записать, что:

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{\varphi_A}{\varphi_B} = \frac{1200^\circ}{1500^\circ} = \frac{4}{5} = \frac{4x}{5x}$$

Из геометрических соображений заметим, что

$$R_B - R_A = L = 24 \text{ см}$$

Тогда

$$5x - 4x = 24$$

$$x = 24 \text{ (см)}$$

Значит:



$$R_A = 96 \text{ (см)}, R_B = 120 \text{ (см)}$$

Угол поворота робота будет равен:

$$\alpha = \frac{r_A * \varphi_A}{R_A} = \frac{8 * 1200^\circ}{96} = 100^\circ$$

Обозначим точку, в которой находится маркер как С. Тогда

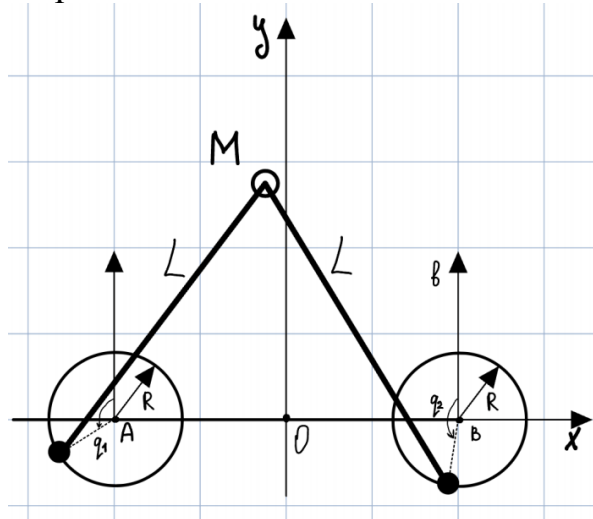
$$R_C = 96 + 8 = 104 \text{ (см)}$$

Длина дуги окружности, которую нарисовал робот, равна:

$$2\pi R_C * \frac{\alpha}{360^\circ} \approx 2 * 3,14 * 104 * \frac{100}{360} = 181,4(2) \approx 181 \text{ (см)}$$

№ п/п	Критерий	Баллы
<b>Пункт А</b>		
1.1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (100°)	5
1.2	Приведён только верный ответ (100°)	3
1.3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит в себе <b>одну</b> ошибку	2
1.4	В остальных случаях	0
<b>Пункт Б</b>		
2.1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (181 см)	5
2.2	Приведён только верный ответ (181 см)	3
2.3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит в себе <b>одну</b> ошибку	2
2.4	В остальных случаях	0

№6 (10 баллов) Маркер, закрепленный в точке М, приводится в движение двумя моторами, находящимися в точках А(-1; 0) и В(1; 0), через систему рычагов R, L. Рычаги R жёстко закреплены к моторам и вращаются вместе с ними, рычаги L крепятся к R таким образом, что они могут поворачиваться на произвольный угол, задаваемый общей кинематикой всех рычагов и положением моторов. Длина рычага R = 50 мм, длина рычага L = 200 мм.



Определите положение моторов, при котором маркер встанет в точку М с координатами (-1; 1,5), где длина единичного отрезка 1 дм? В ответе укажите углы поворота моторов  $q_1$  и  $q_2$ , отложенные от вертикальных осей а и b, проходящих через центры моторов вверх по правилу правой руки. Ответ дайте в градусах с точностью до целых. Округление стоит производить только после получения финального ответа.

Нулевыми углами считаются такие углы, при которых точки крепления L к R находятся на вертикальных осях а и b. Градусные меры углов  $q_1$  и  $q_2$  могут изменяться от  $0^\circ$  включительно до  $360^\circ$ , при этом не достигая  $360^\circ$ .

Ответ:  $q_1=180^\circ$ ,  $q_2=53^\circ$

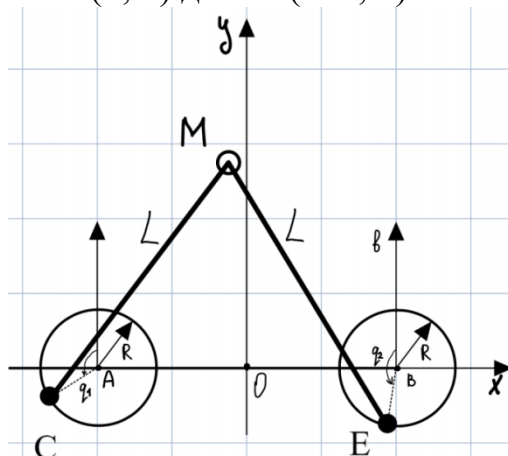
Решение

Переведём значения из дециметров миллиметры.

$$M(-1; 1,5) \text{ дм} = M(-100; 150) \text{ мм}$$

$$A(-1; 0) \text{ дм} = A(-100; 0) \text{ мм}$$

$$B(1; 0) \text{ дм} = B(100; 0) \text{ мм}$$



Пусть точки С и Е - искомые точки положения концов стержней L. Точки С и Е - точки, лежащие на окружности радиуса L с центром М.

Уравнение окружности с центром в точке М радиуса L:

$$(X-X_M)^2+(Y-Y_M)^2=L^2$$

Точка С лежит на окружности с центром А и радиуса R. Уравнение окружности:

$$(X-X_A)^2+(Y-Y_A)^2=R^2$$

Точка В лежит на окружности с центром В и радиуса R. Уравнение окружности:

$$(X-X_B)^2+(Y-Y_B)^2=R^2$$

Если решить данные уравнения в системе, то мы получим все возможные координаты точек С и Е, удовлетворяющих условию.

Если объединить в систему попарно уравнение окружности с центром в точке М и уравнение окружности с центром в точке А, то при её решении мы получим координаты возможного положения точки С.

$$(X-X_M)^2+(Y-Y_M)^2=L^2$$

$$(X-X_A)^2+(Y-Y_A)^2=R^2$$

Подставим координаты точек и известные длины в миллиметрах в систему уравнений:

$$(X-(-100))^2+(Y-150)^2=200^2$$

$$(X-(-100))^2+(Y-0)^2=50^2$$

Получим:

$$(X+100)^2+(Y-150)^2=200^2$$

$$(X+100)^2+(Y)^2=50^2$$

Решив уравнения в системе, получим координаты точки С:

$$X=-100, Y=-50$$

Если объединить в систему попарно уравнение окружности с центром в точке М и уравнение окружности с центром в точке В, то при её решении мы получим координаты возможного положения точки Е.

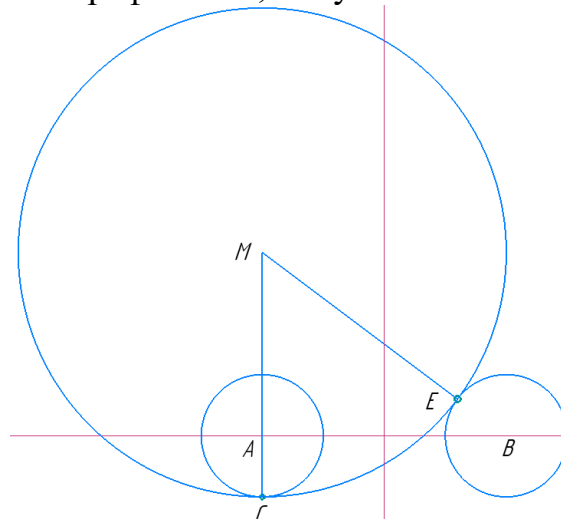
$$(X+100)^2+(Y-150)^2=200^2$$

$$(X-100)^2+(Y-0)^2=50^2$$

Решив уравнения в системе, получим координаты точки Е:

$$X=60, Y=30$$

Решив системы уравнений графически, получим:



Определим градусные меры углов поворота моторов.

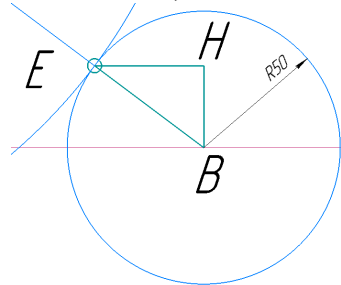
Олимпиада «Ломоносов» по Робототехнике. Очный этап.  
8-10 классы. 2024–2025 уч. г

Для первого мотора угол поворота равен

$$q_1 = 180^\circ.$$

Определим градусную меру  $q_2$  второго мотора.

Сделаем рисунок, обозначим на нем точку Н, которая будет находится на вертикальной оси  $b$ . Точка Н имеет ту же координату по оси ОХ, что точка В, и ту же координату по оси ОУ, что и точка Е, то есть Н(100;30):



Угол ЕНВ - прямой, треугольник ЕНВ - прямоугольный.

НВ = 30 мм, ЕН = 40 мм, ВЕ = 50 мм

$$\sin \angle HBE = \frac{EH}{BE} = 0,8$$

$$q_2 = \angle HBE = \arcsin(0,8) = 53,130... \approx 53^\circ$$

Ответ:  $q_1=180^\circ$ ,  $q_2=53^\circ$

№ п/п	Критерий	Баллы
<b>Q<sub>1</sub></b>		
1.1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (180°)	5
1.2	Приведён только верный ответ (180°)	3
1.3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит в себе <b>одну</b> ошибку	2
1.4	В остальных случаях	0
<b>Q<sub>2</sub></b>		
2.1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (53°)	5
2.2	Приведён только верный ответ (53°)	3
2.3	Приведено полное решение. Решение верное по сути, но содержит в себе <b>одну</b> ошибку	2
2.4	В остальных случаях	0