

Сравнение различных видов полудуплексной коммуникационной сложности

Научный руководитель – Верещагин Николай Константинович

Купцов Тимур Владиславович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории
алгоритмов, Москва, Россия
E-mail: timur.kuptcov@math.msu.ru

Актуальность работы. Классическая коммуникационная сложность, предложенная Э. Яо [?], является мощным инструментом доказательства нижних оценок булевых схем. В 2018 году в работе [?] была введена *полудуплексная* модель коммуникации, в которой участники могут отправлять и принимать информацию одновременно. В модели с противником если оба участника принимают («тихий раунд»), они получают на вход биты информации, отправленные противником. поведение канала определяется типом противника. В модели с *честным* противником участники принимают только согласованные биты 00 или 11, а в модели с *жестким* противником — любые комбинации, включая 01 и 10.

Одной из главных трудностей в этой области является недостаточная точность существующих методов доказательства нижних оценок. Стандартные подходы (такие как классический метод элиминации раундов) не позволяют определить точную сложность функций. До настоящего времени оставалось открытым вопросом, существует ли функция, на которой полудуплексная сложность честного и жесткого противников строго различаются. В частности, для функции, предложенной Верещагиным и Дектяревым [?], известные методы были недостаточны для нахождения точной оценки с жестким противником.

Основные результаты. В данной работе решена проблема разделения сложности для моделей с честным и жестким противником путем структурного анализа протоколов малого размера:

- 1) **Теорема о строгом разделении.** Впервые доказано существование функции f , для которой сложность с честным противником строго меньше сложности с жестким: $C_h^{hd}(f) < C_a^{hd}(f)$. Ранее в [?] была предложена частичная функция f , для которой известно, что $C_h^{hd}(f) = 3$ и $CC(f) = 4$. Нами строго доказано, что её сложность с жестким противником $C_a^{hd}(f) = 4$. Это устанавливает первый пример строгого разделения этих классов сложности.
- 2) **Теорема о минимальности контрпримера.** Доказано, что для любой тотальной функции f выполнение условия $C_h^{hd}(f) \leq 2$ неизбежно влечет совпадение её полудуплексной и классической сложности: $C_h^{hd}(f) = CC(f)$. Это означает, что исследованный нами контрпример со сложностью 3 является абсолютно минимально возможным для демонстрации разрыва.

Заключение. Развитие точных методов нижних оценок имеет фундаментальное значение для теории вычислений. Главным вызовом в этой области выступает гипотеза Карчмера-Раза-Вигдерсона (KRW) [?], связывающая коммуникационную сложность композиции функций с глубиной булевых схем. Доказательство KRW позволило бы строго разделить классы NC^1 и P .

Источники и литература

- 1) Yao A. C.-C. Some Complexity Questions Related to Distributive Computing (Preliminary Report) // STOC 1979. — ACM, 1979. — P. 209–213.
- 2) Hoover K., Impagliazzo R., Mihajlin I., Smal A. V. Half-Duplex Communication Complexity // ISAAC 2018. Vol. 123. — 2018. — P. 10:1–10:12.
- 3) Верещагин Н. К., Дектярев М. В. Полудуплексная коммуникационная сложность с противником может быть меньше классической коммуникационной сложности // Математический сборник. — 2025. — Т. 216, № 6. — С. 3–45.
- 4) Karchmer M., Raz R., Wigderson A. On proving lower bounds for circuit size // Proceedings of the Eighth Annual Structure in Complexity Theory Conference. — IEEE, 1995. — P. 36–43.