

Метод Арнольда в топологической теории Галуа

Научный руководитель – Белов Алексей Яковлевич

Аллеманд Аллан Олегович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории
алгоритмов, Москва, Россия
E-mail: allansuleykin@gmail.com

<div>

Введение

Важной математической проблемой, рассматривавшейся как минимум с 18 века, является вопрос о разрешимости уравнения в определённом классе допустимых операций. Интересный подход, разработанный Лиувилем, позволяет ответить на вопрос, когда интеграл может быть выражен в элементарных функциях. Отличное изложение теории Лиувилля можно найти в монографии Ритта [6]. Здесь мы приводим теорему, которая даёт критерий того, когда интеграл может быть выражен в элементарных функциях. Для удобства, следуя [3], мы формулируем теорему в современных терминах. Пусть K — функциональное дифференциальное поле, и функция $f \in K$. Напомним, что обобщённое элементарное расширение $F \supseteq K$ — это функциональное дифференциальное поле, элементы которого могут быть выражены через элементарные функции и алгебраические расширения из K .

Теорема 1. *Интегральная теорема Лиувилля* Неопределённый интеграл $y(x) = \int f dx$ лежит в некотором обобщённом элементарном расширении $F \supseteq K$ тогда и только тогда, когда

$$y(x) = v_0(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \log v_i(x)$$

для некоторых констант λ_i и функций $v_i \in K$.

Другими словами, эта теорема утверждает, что либо выражение для интеграла имеет простую форму, приведённую выше, либо интеграл не может быть выражен в элементарных функциях. Другой метод для решения вопросов такого рода был разработан В.И. Арнольдом и основан на разрешимости группы монодромии. Обзор идей Арнольда можно найти в [4]. Метод Арнольда был далее развит А.Г. Хованским [3]. В этой работе мы иллюстрируем дальнейшие применения этого метода к вопросу разрешимости трансцендентных уравнений в элементарных функциях. В недавней статье этот метод был применён для доказательства неразрешимости в элементарных функциях уравнения $\tan(x) - x = a$. Интересно отметить, что, с другой стороны, это уравнение может быть решено в квадратурах [5]. Явные формулы приведены для аналогичного уравнения, включающего котангенс, но тот же метод может быть применён к уравнению $\tan(x) - x =$

Кратко приведем основные идеи метода, использованного в выше приведенной статье. Предположим, что мы пытаемся решить в элементарных функциях (то есть, неформально говоря, при помощи композиций и алгебраических операций логарифмических, экспоненциальных и тождественных функций) уравнение $f(z) = a$, где $f(z)$ голоморфна и не является константой. Когда a описывает замкнутую кривую в комплексной плоскости, корни также описывают кривые, которые, однако, не обязательно замкнуты. Таким образом, возникает перестановка корней, и в [1] показано, что если эта группа неразрешима, то уравнение не может быть решено в элементарных функциях. Важный шаг при применении этого метода заключается в нахождении корней для фиксированного параметра a_0 . Например, для уравнения $\tan(z) - z = 0$ все корни лежат на вещественной оси \mathbb{R} . В то время как в [1] использовался прямой комплексно-аналитический подход для доказательства этого результата, А.М. Елишев заметил, что результаты такого рода иногда могут быть выведены из теории Штурма—Лиувилля, так как корни часто могут рассматриваться как собственные значения некоторого регулярного оператора Штурма—Лиувилля [2].

Неразрешимость уравнения $\sin(z) - z = a$

Рассмотрим уравнение

$$\sin(z) - z = a$$

в комплексных числах, где функцию в левой части будем обозначать $f(z)$. Докажем, что уравнение $f(z) = a$ неразрешимо в элементарных функциях. Начнем с нахождения особых точек:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(z) - z \\ f'(z) &= \cos(z) - 1 = 0 \Rightarrow z = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ f''(2\pi k) &= -\sin(2\pi k) = 0 \\ f'''(2\pi k) &= -\cos(2\pi k) = -1 \neq 0 \end{aligned}$$

Видим, что особыми точками функции $f(z)$ являются $z = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, а корни уравнения $f(z) = a$ имеют кратность 3. Получается, что при обходе параметром a особой точки три корня должны переставиться циклически. Действительно, если, например, a обходит ноль по окружности, то

$$a = re^{i\theta}$$

и в окрестности этой точки

$$f(z) \approx c(z - z_0)^3, c \neq 0$$

Решая уравнение

$$c(z - z_0)^3 = a = re^{i\theta}$$

получаем

$$z_k = z_0 + \sqrt[3]{\frac{a}{c}} e^{2\pi i(k-1)/3}, k = 1, 2, 3$$

Когда θ меняется от 0 до 2π , аргумент $\sqrt[3]{a}$ увеличивается на 2π , вызывая переход каждого корня на следующую ветвь:

$$\langle /div \rangle \langle div \rangle z_1 \rightarrow z_2, z_2 \rightarrow z_3, z_3 \rightarrow z_1 \langle /div \rangle \langle div \rangle$$

$\langle /div \rangle \langle div \rangle$ Найдем эти корни. Так как функция $f(x)$ вещественного аргумента монотонно убывает (и производная зануляется лишь в точках $\pi/2 + \pi k$) $\langle /div \rangle \langle div \rangle$

$$\langle /div \rangle \langle div \rangle f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0 \langle /div \rangle \langle div \rangle$$

$\langle /div \rangle \langle div \rangle$ то уравнение $f(x) = a$ будет иметь один вещественный корень. Заметим дополнительно, что комплексный синус – самосопряженная функция, а потому все комплексные корни уравнения будут идти сопряженными парами. $\langle /div \rangle \langle div \rangle$ Получаем, что при обходе особой точки два сопряженных комплексных корня (ближайших к особой точке) и один вещественный должны переставиться циклически. Остальные корни пройдут петлю около себя и вернуться обратно, так как аналитическая зависимость от a в малой окрестности слабо на них влияет. $\langle /div \rangle \langle div \rangle$ Если же обходить другую особую точку, то циклически переставится другая пара комплексно сопряженных корней (ближайших к этой особой точке) и единственный вещественный корень. При этом изначальная пара сопряженных корней перейдет в себя. $\langle /div \rangle \langle div \rangle$ Таким образом, мы получили перестановки (2 3 1) и (1 5 4). Они порождают группу S_5 , которая неразрешима. Как нами уже было обсуждено ранее, прямым следствием этого является неразрешимость уравнения в элементарных функциях. $\langle /div \rangle \langle div \rangle$

Неразрешимость уравнения $\cos(z) - z = a$

$\langle /div \rangle \langle div \rangle$ Для косинуса аналогично особые точки кратности 3: $\langle /div \rangle \langle div \rangle$

$$\begin{aligned} \langle /div \rangle \langle div \rangle f(z) &= \cos(z) - z \\ \langle /div \rangle \langle div \rangle f'(z) &= -\sin(z) - 1 = 0 \Rightarrow z = 2\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \langle /div \rangle \langle div \rangle f''(2\pi k) &= -\cos(2\pi/3 + 2\pi k) = 0 \\ \langle /div \rangle \langle div \rangle f'''(2\pi k) &= \sin(2\pi/3 + 2\pi k) = -1 \neq 0 \langle /div \rangle \langle div \rangle \end{aligned}$$

$\langle /div \rangle \langle div \rangle$ В силу отрицательности производной почти всюду $\langle /div \rangle \langle div \rangle$

$$\langle /div \rangle \langle div \rangle f'(x) = -\sin(x) - 1$$

$\langle /div \rangle \langle div \rangle$ будет существовать единственный вещественный корень. Так как для косинуса имеет место свойство $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, все его комплексные корни будут попарно сопряжены. Комбинируя петли вокруг особых точек, получим неразрешимую группу S_5 , из-за чего уравнение $\cos(z) - z = a$ также неразрешимо в элементарных функциях. $\langle /div \rangle \langle div \rangle$ $\langle /div \rangle \langle div \rangle$ выражает благодарность своему научному руководителю Алексею Яковлевичу Канель-Белову и академику РАН Алексею Львовичу Семенову за рекомендации во время работы над настоящей работой. $\langle /div \rangle \langle div \text{id="gtx-trans"} \rangle$